26/05/20

Ανάλυση Ευαισθησίας

Θα εξετάσουμε αν και κατά πόσο μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση ενός ΠΓΠ σε ενδεχόμενη μεταβολή της τιμής κάποιας ή κάποιων από τις παραμέτρους.
Η α. ευαισθησίας έχει μεγάλη πρακτική αξία γιατί συχνά δεν έχουμε πλήρη γνώση των δεδομένων του προβλήματος και θέλουμε να εκτιμήσουμε τις συνέπειες από την ενδεχόμενη αλλαγή στις τιμές κάποιων παραμέτρων.

Αν υποθέσουμε ότι ο B είναι ο βασικός πίνακας της βέλτιστης λύσης ενός ΠΓΠ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακολ. συνθήκες:

$B^{-1} b \geq 0$ ← εξασφαλίζει ότι η λύση είναι εφικτή

$c^T - c_B^T B^{-1} A \leq 0^T$ ← εξασφαλίζει ότι δεν επιδέχεται βελτίωσης.

Όταν το πρόβλημα αλλάξει θα πρέπει να εξετάσουμε αν αυτές οι συνθήκες επηρεάζονται. Αν και οι δύο συνθήκες συνεχίζουν να ικανοποιούνται στο νέο πρόβλημα τότε ο πίνακας B παραμένει βασικός πίνακας της βέλτιστης λύσης.

Προσθήκη νέας μεταβλητής

Προσθέτουμε στο ΠΓΠ μια νέα μεταβλητή x_{n+1}
θα προκύψει το πρόβλημα

$$z = \max\{c^T x + c_{n+1} x_{n+1})$$

$$A x + A_{n+1} x_{n+1} = b$$

$$x \geq 0 \ , \ x_{n+1} \geq 0$$

Για να συνεχίσει ο B να είναι βέλτιστος θα πρέπει η μοναδιαία αύξηση του κέρδους της μεταβλητής x_{n+1} να είναι αρνητική δηλαδή:

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^T B^{-1} A_{n+1} \leq 0$$

Αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται τότε το διάνυσμα $[x', 0]^T$ είναι βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος.
Αλλιώς προσθέτουμε μια νέα στήλη στο tableau, η οποία αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή και εφαρμόζουμε μέθοδο Simplex στο νέο πρόβλημα από την αρχή.

Αν προστίθενται περισσότερες από 1 νέες μεταβλητές στο πρόβλημα ακολουθείται η ίδια διαδικασία

Παράδειγμα

Έστω $z = \max(-x_1 - x_2 + x_3)$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$
$$-x_1 - 7x_2 + 2x_3 \leq 2$$
$$7x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10$$
$$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

			-1	-1	1	0	0	0	0	0
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_4	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	
A_3	1	1	-1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	
A_6	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	
A_7	0	8	3	13	0	0	1	0	1	
			-1/2	-9/2	0	0	-1/2	0	0	

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος αν προστεθούν δύο νέες μεταβλητές x_8 και x_9 με αντίστοιχα κόστη $c_8 = 2$, $c_9 = -2$ και αντίστοιχες στήλες $A_8 = [4, -2, 0, -3]^T$ και $A_9 = [0, 5, 3, 0]^T$

Λύση

Προσθέτουμε στο τελικό tableau του αρχ. προβλήματος δύο στήλες που αντιστοιχούν στις νέες μεταβλητές, αυτές είναι

$$B^{-1} \cdot A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 11/2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

∇ Ο B^{-1} προκύπτει από τις 4 τελευταίες στήλες του tableau της βέλτ. λύσης του αρχ. προβλήματος, αφού στο αρχικό tableau του προβλήματος εκεί εμφανίζεται ο μοναδιαίος πίνακας.

Επίσης

$$\bar{c}_8 = c_8 - c_B^T B^{-1} A_8 = 2 - [2,1,0,0]\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\-5\end{bmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_9 = c_9 - c_B^T B^{-1} A_9 = -3 - [2,1,0,0]\begin{bmatrix}5/2\\5/2\\11/2\\5\end{bmatrix} = -11/2$$

Το νέο tableau:

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	θ
			1	1	1	0	0	0	0	2	-3	
A_4	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	$\boxed{3}$	5/2	1
A_3	1	1	-1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	-1	5/2	-
A_6	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	-1	11/2	-
A_7	0	8	3	13	0	0	1	0	1	-5	5	-
		1	-1/2	-9/2	0	0	-1/2	0	0	3	-11/2	

2) Βλέπουμε ότι $\bar{c}_8 = 3 > 0$ άρα παραβιάζεται η δεύτερη συνθήκη που σημαίνει ότι πρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex ξεκινώντας από το tableau αυτό.

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	θ
			1	-1	1	0	0	0	0	2	-3	
A_8	2	1	1/2	11/6	0	1/3	1/6	0	0	1	5/6	
A_3	1	2	0	16/3	1	1/3	2/3	0	0	0	10/3	
A_6	0	12	7	19/3	0	1/3	2/3	1	0	0	19/3	
A_7	0	13	7/2	89/6	0	1/3	7/6	0	1	-4	35/6	
		4	-2	-10	0	1	-1	0	0	0	-8	

3) Ικανοποιούνται οι συνθήκες βελτιστότητας και συνεπώς η βέλτ. λύση του νέου προβλήματος είναι $x' = [0,0,2,0,0,12,13,1,0]^T$

Προσθήκη νέου περιορισμού

α) Προσθήκη νέου ανισοτικού περιορισμού

Ας υποθέσουμε ότι προσθέτουμε σ' ένα ΠΓΠ τον περιορισμό $\alpha_{m+1}^T x \geq b_{m+1}$ με γνωστά α_{m+1} και b_{m+1}

Αν η βέλτιστη λύση x' του αρχικού προβλήματος ικανοποιεί τον νέο περιορισμό τότε είναι η βέλτιστη λύση και του νέου προβλήματος.

Αλλιώς εισάγουμε μια νέα περιθώρια μεταβλητή x_{n+1} και ο περιορισμός γίνεται

$\alpha_{m+1}^T x - x_{n+1} = b_{m+1}$

Ο νέος βασικός πίνακας $\bar{B}$ είναι της μορφής $\bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ \alpha_{B,m+1}^T & -1 \end{bmatrix}$

Και ο αντίστροφος $\bar{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ \alpha_{B,m+1}^T B^{-1} & -1 \end{bmatrix}$

Το διάνυσμα των μοναδιαίων σχετικών κερδών του νέου προβλήματος θα είναι

$\bar{c} = [\underline{c}^T - c_B^T \cdot B^{-1} A, \ 0]$ μη αρνητικό

Αυτό σημαίνει ότι ο $\bar{B}$ είναι βασικός πίνακας του δυϊκού προβλήματος και η αντίστοιχη β. λύση του δυϊκού είναι και εφικτή

Δηλαδή μπορούμε να εφαρμόσουμε δυϊκή Simplex στο νέο πρόβλημα ξεκινώντας από το tableau που αντιστοιχεί στο πίνακα $\bar{B}$

Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα του προηγούμενου παραδείγματος.

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση αν προσθέσουμε τον περιορισμό $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4$

Λύση

Ο νέος περιορισμός παραβιάζεται από την βέλτιστη του αρχικού προβλήματος

$x' = [0, 0, 1, 3, 0, 11, 8]^T$

Με την προσθήκη της περιθώριας μεταβλητής x_8 ο νέος περιορισμός γίνεται

$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_8 = 4$ ή $2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_8 = -4$

Έτσι έχουμε ότι $a_3^T = [2, -3, -5, 0, 0, 0, 0]$, $b_3 = -4$ άρα

$a_3^T x' - b_3 = -1$

Η τελευταία γραμμή του κύριου tableau στο νέο πρόβλημα είναι:

$$a_{B,3}^T B^{-1} A - a_3^T = [0, -5, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 11/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 7/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 13/2 & 9/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- [2, -3, -5, 0, 0, 0, 0] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{29}{2}, 0, 0, -\frac{5}{2}, 0, 0\right]$$

Συνεπώς το αρχικό tableau του νέου προβλήματος είναι:

			-1	-1	1	0	0	0	0	-3	0
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
A_4	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	0	
A_3	1	1	-1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	0	
A_6	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	0	
A_7	0	3	3	13	0	0	1	0	1	0	
A_8	0	-1	1/2	-29/2	0	0	-5/2	0	0	1	
		1	-1/2	-9/2	0	0	-1/2	0	0	0	

Συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο της δυϊκής Simplex και προχωράμε στο επόμενο tableau που είναι και το τελικό, αφού οδηγούμαστε σε εφικτή λύση

			-1	-1	1	0	0	0	0	-3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	θ
A_4	0	$14/5$	$8/5$	$13/5$	0	1	0	0	0	$1/5$	
A_3	1	$4/5$	$-2/5$	$3/5$	1	0	0	0	0	$1/5$	
A_6	0	$54/5$	$33/5$	$8/5$	0	0	0	1	0	$1/5$	
A_7	0	$38/5$	$16/5$	$36/5$	0	0	0	0	1	$2/5$	
A_5	0	$2/5$	$-1/5$	$29/5$	0	0	1	0	0	$-2/5$	
		$3/5$	$-1/4$	$-3/5$	0	0	0	0	0	$-1/5$	

Η βέλτιστη λύση του νέου ΠΓΠ είναι η $\underline{x}' = [0, 0, \frac{4}{5}, \frac{14}{5}, \frac{2}{5}, \frac{54}{5}, \frac{33}{5}, 0]^T$

Προσθήκη νέου ισοτικού περιορισμού

Ο νέος περιορισμός παραβιάζεται από τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος. Είναι της μορφής $\underline{a}_{m+1}^T \underline{x} = b_{m+1}$ και επειδή είναι ισοτικός δεν μπορούμε να εισάγουμε περιθώρια μεταβλητή για να φέρουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για τη βέλτιστη λύση του αρχικού
$\underline{a}_{m+1}^T \underline{x}' > b_{m+1}$
Εισάγουμε τη τεχνητή μεταβλητή x_{n+1} και έχουμε

$$\max(\underline{c}^T \underline{x} + M x_{n+1})$$
$$A\underline{x} = b$$
$$\underline{a}_{m+1}^T \underline{x} - x_{n+1} = b_{m+1}$$
$$\underline{x} \geq 0, \quad x_{n+1} > 0$$
και $M << 0$

Η β.ε.λ θα είναι $[\underline{x}', \ \underline{a}_{m+1}^T \underline{x}' - b_{m+1}]^T$
Ο B παραμένει ίδιος με αυτόν της προηγούμενης περίπτωσης

Η διαφορά είναι ότι στην προηγούμενη περίπτωση είχαμε μια β.ε.λ του δυϊκού προβλήματος ενώ εδώ έχουμε μια β.ε.λ πρωτεύοντος προβλήματος.
Άρα εδώ εφαρμόζουμε κανονική Simplex
Αν στη βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος έχουμε ότι $x_{n+1}=0$, τότε αυτή

Είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος μας με την προσθήκη του νέου περιορισμού. Διαφορετικά το νέο πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

Μεταβολή των συντελεστών b_i

Υποθέτουμε ότι κάποιο από τα στοιχεία b_i μεταβάλλεται σε $b_i + \delta$. Στόχος μας είναι να καθορίσουμε το εύρος των τιμών του δ, για τις οποίες ο βασ. πίνακας της βέλτιστης λύσης του αρχ. προβλήματος παραμένει βέλτιστος στο πρόβλημα.

Άρα ισχύει η συνθήκη

$$\max_{\{j \mid b_{ji} > 0\}} \left(- \frac{x_{B(j)}}{b_{ji}} \right) \le \delta \le \min_{\{j \mid b_{ji} < 0\}} \left(- \frac{x_{B(j)}}{b_{ji}} \right)$$

Αν το δ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη, το βέλτιστο κέρδος ως συνάρτηση του δ δίνεται από την εξίσωση $c_B^T B^{-1}(b + \delta e_i) = u^T b + \delta u_i$, $u^T = c_B^T B^{-1}$ είναι η λύση του δυϊκού προβλήματος που αντιστοιχεί στον βασικό πίνακα B.

Αν το δ βρίσκεται εκτός των ορίων η λύση που αντιστοιχεί στον B είναι βασική αλλά όχι εφικτή. Σε αυτή τη περίπτωση η u είναι β.ε.λ του δυϊκού και μπορούμε να εφαρμόσουμε δυϊκή Simplex ξεκινώντας από την τρέχουσα βάση B.

Άλλη προσέγγιση: Εφαρμόζεται και όταν μεταβάλλονται περισσότερα από 1 b_i.
Το διάνυσμα $x_B = B^{-1} b$ επηρεάζεται άμεσα από τις μεταβολές του b άρα αν το $x_{B,N} = B^{-1}(b + \delta e_i) \ge 0$ τότε ο βασικός πίνακας B παραμένει βέλτιστος και αλλάζουν μόνο οι τιμές των βασικών μεταβλητών.
Διαφορετικά εφαρμόζουμε μόνο την δυϊκή Simplex ξεκινώντας από το τελικό tableau του αρχ. προβλήματος, αφού πρώτα αντικαταστήσουμε το x_B με το x_B

Παράδειγμα

Έστω το ΠΓΠ $\quad Z = -\max(5x_1 + x_2 - 12x_3)$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 16$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1..4$$

Το tableau της βέλτιστης λύσης είναι:

			5	1	-12	0	∂
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	
A_1	5	2	1	0	-3	2	
A_2	1	2	0	1	5	-3	
		-12	0	0	-2	-7	

Έστω ότι θα μεταβάλλεται το b_1 κατά δ.
Να βρεθούν οι τιμές της μεταβολής δ για τις οποίες δεν αλλάζει η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος.

Λύση

Ο αντίστροφος πίνακας B της βελτ λύσης αποτελείται από τις 2 τελευταίες στήλες του τελικού tableau, αφού εκεί βρίσκεται ο μοναδιαίος πίνακας στο αρχικό tableau.
Μιας και μεταβάλλεται το b_1 το διάνυσμα β θα είναι ίσο με την πρώτη στήλη του B^{-1} δηλαδή $\beta^T = [-3, 5]$
Οπότε το νέο διάνυσμα των βασικών μεταβλητών θα είναι $x_{B\delta} = x_B + \delta\beta =$
$x_{B\delta} = [2 - 3\delta, 2 + 5\delta]$
Για να συνεχίσει να είναι η τρέχουσα λύση βέλτιστη θα πρέπει να ισχύει:

$x_B + \delta\beta \geq 0$ δηλ $\quad 2 - 3\delta \geq 0$, $\; 2 + 5\delta \geq 0 \Rightarrow -\frac{2}{5} \leq \delta \leq \frac{2}{3}$

Αν όχι τότε η x_1 γίνεται αρνητική (η x_2 γίνεται αρνητική)
οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δυϊκή Simplex για να βρούμε τη νέα βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα

Έστω το πρώτο παράδειγμα του μαθήματος.
Να βρεθεί η βέλτιστη λύση αν μεταβάλλουμε το διάνυσμα των σταθερών όρων των περιορισμών και γίνει $\underline{b}^T = [3, -3, 1, 10]$

Λύση

Εδώ αλλάζουν περισσότερα b_i

Οπότε

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ -1/2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη οπότε προχωράμε στη δυϊκή Simplex αντικαθιστώντας στο τελικό ταμπλό του αρχ. προβλήματος το $\underline{x}_B$

			-1	-1	1	0	0	0	0	-3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	θ
A_4	0	3/2	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	0	
A_3	1	-3/2	-1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	0	
A_6	0	-1/2	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	0	
A_7	0	7	3	13	0	0	1	0	1	0	
		$-\frac{3}{2}$	-1/2	-9/2	0	0	-1/2	0	0	0	

Παρατηρούμε ότι $\underline{x}_{B_{(3)}} = -1/2 < 0$ κι όλα τα άλλα στοιχεία της $3^{ης}$ γραμμής μη αρνητικά. Άρα το νέο ΠΓΠ δεν έχει εφικτές λύσεις.

Μεταβολή των συντελεστών κέρδους c_j

Υποθέτουμε ότι κάποιο από τα c_j γίνεται $c_j + \delta$

Συνθήκη βελτιστότητας $\underline{c}^T - \underline{c}_B^T B^{-1} A \le \underline{0}^T$

Αν μεταβληθεί η c_j και η x_j δεν είναι βασική μεταβλητή τότε το διάνυσμα των συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών $\underline{c}_B$ δεν μεταβάλλεται.
Σε αυτή τη περίπτωση επηρεάζονται μόνο οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους x_j των οποίων οι συντελεστές c_j μεταβάλλονται.
Για να παραμένει βέλτιστη η λύση του αρχ. προβλήματος θα πρέπει να ισχύει

$c_j + \delta - c_B^T B^{-1} \underline{A}_j \le 0$

ή $\boxed{\delta \le \bar{c}_j}$

Αν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη παραμένει βέλτιστη η λύση του αρχ. προβλήματος αλλιώς εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex ξεκινώντας από την τρέχουσα β.ε.λ.

Επανεκτιμούμε την μηδενική γραμμή του τελικού tableau χρησιμοποιώντας τους νέους συντελεστές κέρδους. Αν αυτή παραμένει μη θετική τότε η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει. Διαφορετικά συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο Simplex από το τελικό tableau του αρχ. προβλήματος.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του ΠΓΠ του παραδείγματος 1 του μαθήματος αν το διάνυσμα των συντελεστών κέρδους γίνει $\underline{c}^T = [-3, 3, 2, 0, 0, 0, 0]$

Λύση

Εδώ αλλάζουν τα c_1, c_2, c_3. Η x_3 είναι βασική μεταβλητή άρα αλλάζουν όλα τα στοιχεία του $\bar{c}$ που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές.

$$\bar{\underline{c}} = \underline{c}^T - \underline{c}_B^T B^{-1} \cdot A = [-3, 3, 2, 0, 0, 0, 0] - [0, 2, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 11/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & \cdots \\ -1/2 & 7/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 13/2 & 9/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 3 & 13 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= [-2, 1, 0, 0, -1, 0, 0]$$

$\bar{c}_2 > 0$ άρα δεν ικανοποιείται η συνθήκη βελτιστότητας, οπότε προχωράμε στην εφαρμογή της Simplex και το αρχικό ταμπλώ του νέου προβλήματος προκύπτει από το τελικό ταμπλώ του αρχ. προβλήματος αφού αντικαταστήσουμε το $\bar{c}$.

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
			-3	8	2	0	0	0	0	
A_4	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	6/11
A_3	2	1	-1/2	$\boxed{7/2}$	1	0	1/2	0	0	2/7
A_6	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	22/9
A_7	0	3	3	13	0	0	1	0	1	3/13
		2	-2	1	0	0	-1	0	0	

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_4	0	10/7	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	
A_2	8	2/7	-1/7	7/2	1	0	1/2	0	0	
A_6	0	63/7	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	
A_7	0	30/7	3	13	0	0	1	0	1	
		16/7	-13/7	0	2/7	0	-8/7	0	0	

Η νέα βέλτιστη λύση είναι $x'^T = \left[\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{63}{7}, \frac{30}{7}\right]$

Μεταβολή των συντελεστών a_{ij}

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν τα στοιχεία a_{ij} του A που αλλάζουν ανήκουν σε βασικές ή μη βασικές στήλες A_j

Οι μεταβλητές δεν αφορούν στοιχεία βασικών στηλών

Υποθέτουμε ότι το στοιχείο a_{ij} της μη βασικής στήλης A_j του A μεταβάλλεται κατά μια ποσότητα δ, δηλ. γίνεται $a_{ij}+\delta$.
Αφού η A_j δεν είναι βασική ο B δεν αλλάζει και κατά συνέπεια η συνθήκη εφικτότη

δεν επηρεάζεται. Αλλάζει μόνο η μοναδιαία αύξηση κέρδους της x_j.
Για να μην αλλάξει η βέλτιστη λύση θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη.

$$c_j - u^T(A_j + \delta e_i) \leq 0$$

$$c_j - \delta u_i \leq 0 \quad , \quad u^T = c_B^T B^{-1}$$

Αν η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται τότε η μη βασική στήλη A_j εισάγεται στην βάση και συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο Simplex αντικαθιστώντας τη j-στήλη του τελικού tableau με την στήλη $B^{-1}(A_j + \delta e_j)$

Θ. Μεταβολές αφορούν στοιχεία βασικών στηλών

Η A_j μεταβάλλεται και γίνεται A_j'
Τότε υπάρχει το ενδεχόμενο οι βασικές στήλες του αρχ. προβλήματος να μην αποτελούν βάση του νέου προβλήματος. Ακόμη και αν δεν συμβαίνει αυτό η αλλαγή μιας βασικής στήλης A_j μεταβάλλει τον πίνακα B^{-1} και κατά συνέπεια αλλάζει όλο το tableau.
Η αλλαγή αυτή αντιμετωπίζεται με δύο απλά βήματα:
α) Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή x_j' και την στήλη A_j' στον πίνακα A, ενώ ο συντελεστής κέρδους της x_j' είναι ίσος με c_j
Η στήλη που εισάγεται στο tableau της Simplex είναι $B^{-1}A_j'$, όπου B ο «παλιός» βασικός πίνακας. Η μοναδιαία αύξηση κέρδους x_j' είναι $\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} A_j'$

β) Εξάγουμε την «παλιά» μεταβλητή x_j από τη βάση, εισάγουμε τη νέα μεταβλητή x_j' και συνεχίζουμε από εκεί και πέρα με τη Simplex.

Για να είναι εφικτό το (β), θα πρέπει το l-οστό στοιχείο της j-οστής στήλης του αρχικού tableau του νέου προβλήματος να είναι διάφορο του μηδενός.
Αν είναι ίσο με 0 ο B' δεν είναι πλέον βασικός
Σε αυτή τη περίπτωση ένας τρόπος να απαλλαχθούμε από την «ενοχλητική» μεταβλητή x_j είναι να την χειριστούμε ως τεχνητή μεταβλητή και να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μεγάλου M ή των δύο φάσεων.

Παραδείγματα

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του ΠΓΠ του παραδείγματος 1 αν αντί των δύο πρώτων περιορισμών έχουμε αντίστοιχα τους περιορισμούς $2x_1+3x_2-2x_3\le 2$

$-x_1+4x_2+x_3\le 2$

Λύση

Βλέπουμε ότι αλλάζουμε τις στήλες A_2 και A_3 από τις οποίες η A_3 είναι βασική. Συνεπώς μεταβάλλουμε την $2^η$ στήλη του tableau και εισάγουμε μια νέα μεταβλητή την x_3'.

Οι νέες στήλες του A είναι $A_2^T=[3,4,1,6]$ και $A_3'^T=[-2,1,-1,-2]$

Οι αντίστοιχες στήλες του tableau δίνονται από:

$$B^{-1}A_2=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\1\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\\3\\10\end{bmatrix}\qquad B^{-1}A_3'=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2\\1/2\\-1/2\\-1\end{bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε στο τελικό tableau του αρχικού προβλήματος την $2^η$ στήλη με την $B^{-1}A_2$ και προσθέτουμε μια ακόμη στήλη την $B^{-1}A_3'$. Κατόπιν εισάγουμε την x_3' στη βάση στη θέση της x_3 που διαγράφουμε.

			-3	3	2	0	0	0	0	1	
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_3'	θ
A_4	0	3	3/2	5	0	1	1/2	0	0	-3/2	
A_3	2	1	-1/2	2	1	0	1/2	0	0	1/2	
A_6	0	11	13/2	3	0	0	1/2	1	0	-1/2	
A_7	0	8	3	10	0	0	1	0	1	-1	
		2	-1/2	-3	0	0	0	0	0	1/2	

			-3	3	0	0	0			
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_4	A_5	A_6	A_7	A_3'	θ
A_4	0	6	0	11	1	2	0	0	0	
A_3'	1	2	-1	4	0	1	0	0	1	
A_6	0	12	6	5	0	1	1	0	0	
A_7	0	10	2	14	0	2	0	1	0	
		2	0	-5	0	-1	0	0	0	

Άρα η ενδεικτική γραμμή είναι μη θετική έχουμε βρει τη νέα βέλτιστη λύση που είναι $x^{T} = [0, 0, 2, 6, 0, 12, 10]$. Επειδή το $\bar{c}_1 = 0$ χωρίς η x_1 να είναι βασική μεταβλητή εισάγοντας την A_1 στη βάση έχουμε μια άλλη βέλτιστη λύση. Άρα το ΠΓΠ έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Παράδειγμα

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(2x_1 - x_2 + x_3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Το tableau της βέλτιστης λύσης είναι

			2	-1	1	0	0	
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
A_1	2	6	1	1	1	1	0	
A_5	0	10	0	3	1	1	1	
		12	0	-3	-1	-2	0	

α) Υποθέστε ότι αλλάζει η στήλη A_2 γίνεται $[2, 5]$. Ελέγξτε αν αλλάζει η βέλτιστη λύση.

β) Έστω ότι η πρώτη στήλη του A γίνεται $A_1^T = [0, -1]$. Να βρεθεί η νέα βέλτιστη λύση.

Λύση

α) Η στήλη A_2 δεν είναι βασική άρα αρχικά ελέγχουμε αν το $\bar{c}_2$ γίνεται θετικό.

$$\bar{c}_2 = c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 = -1 - [2\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = -5$$

Άρα η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει. Το μόνο που αλλάζει είναι η 2η στήλη του τελικού tableau που γίνεται

$$B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

β) Η στήλη A_1 είναι βασική οπότε εισάγουμε μια νέα μεταβλητή x_1' για την οποία έχουμε

$$B^{-1}A_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και $$\bar{c}_1' = c_1' - c_B^T B^{-1} A_1' = 2 - [2, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$$

Βλέπουμε ότι πρώτο στοιχείο της στήλης $B^{-1}A_1'$ της νέας μεταβλητής x_1' είναι 0, άρα οι στήλες του B δεν αποτελούν βάση του νέου προβλήματος.

~~Επομένως~~. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του μεγάλου Μ και ολοκληρώνουμε

	c_B	x_B	A_1 (M)	A_2 (−1)	A_3 (1)	A_4 (0)	A_5 (0)	θ
A_1	M	6	1	1	1	1	0	6
A_5	0	10	0	3	1	1	1	10
		6M	0	−1−M	1−M	−M	0	

	c_B	x_B	A_2 (−1)	A_3 (1)	A_4 (0)	A_5	A_1'	θ
A_3	1	6	1	1	1	0	0	
A_5	0	4	2	0	0	1	−1	
		6	−2	0	−1	0	2	

Σε αυτό το tableau πρέπει να εισάγουμε στην βάση τη μεταβλητή x_1' αφού $\bar{c}_1' = 2 > 0$

Παρατηρούμε όμως ότι $B^{-1}A_1' \le 0$ πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα μας δεν είναι φραγμένο και η αντικ. συνάρτηση απειρίζεται.